Integration von Wurzelfunktionen (2) mit der Arkussinusfunktion

Schwerer Stoff für besonders gute Schüler
Facharbeiten
oder
Studenten

Datei Nr. 48056

Stand 18. Februar 2018

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Stoff-Verteilung zur Integration

Grundniveau - Gymnasium

Datei Nr. 48011 Teil 1	Einführung in die Grundlagen: Änderungen und Differenziale Lineare Änderungen / Nicht-lineare Änderungen Lineare Änderungen auf der Tangente - Differenzialbegriff Das unbestimmte Integral – Stammfunktionen - Grundintegral 1
Datei Nr. 48012 Teil 2:	Integrationsregeln Unbestimmte Integrale für ganzrationale und gebrochen rationale Funktionen mit vielen Substitutionsarten. Umfangreiches Übungsmaterial
Datei Nr. 48013 Teil 3	Das bestimmte Integral für Potenzfunktionen, ganzrationale und gebrochen rationale Funktionen, auch mit Substitution.
Datei Nr. 48014 Teil 4	Integration von Wurzelfunktionen (1)
Datei Nr. 48030	Grundniveau für einfache Anforderungen: Gemischtes Trainingsheft Gründlichen Wiederholen und Trainieren: Potenzfunktionen, Rationale Funktionen, Wurzel-, Exponential- und Trigonometrische Funktionen.
Datei Nr. 48015 Teil 5	Partielle Integration: alles
Datei Nr. 45041 Teil 6	Exponentialfunktionen alles
Datei Nr. 46041 Teil 7	Ln-Funktionen alles
Datei Nr. 48016 Teil 8	Trigonometrische Funktionen alles
Datei Nr. 48040	Lernblatt: Die wichtigsten Integrale

Höheres Niveau (Studium)

Gebrochen rationalen Funktionen:

Datei Nr. 48050	Integrationsmethoden - Übersicht
Datei Nr. 48051	Integration mit Partialbruchzerlegung
Datei Nr. 48052	Reduktionsformel bzw. Umgekehrte partielle Integration
Datei Nr. 48055	Integration mit arctan-Funktionen
Datei Nr. 48060	Sammlung schwerer Integrale

Datei Nr. 48056	Integration von Wurzelfunktionen (2) mit arcsin-Funktionen
Datei Nr. 48070	Integration von Wurzelfunktionen (3): Substitutionen mit sin und sinh
Datei Nr. 48057	Integration der Arkusfunktionen
Datei Nr. 48061	Schwierige Integrale Aufgabensammlung

Vorwort

Die Funktion arcsin ist die Umkehrfunktion von sinus und hat die Ableitung $\arcsin(x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Daher kann man $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin(x) + C$ als weiteres Grundintegral auf die Integration vieler Wurzelfunktionen anwenden. Das geht deutlich über das Schulniveau hinaus.

Studenten werden sich freuen …

Inhalt:

1 **Grundwissen** über die Funktion arcsin(x) 3

2 Integrale, die auf das Grundintegral zurückgeführt werden können 4

$\int_0^{0,5} \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}dx$ $\int \sqrt{\frac{1}{4-x^2}}dx =$ $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x^2}}$ $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}$ $\int \frac{4}{\sqrt{-x^2-2x}}dx$

$\int \frac{1}{\sqrt{3x-x^2}}dx$ $\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-2x+1}}dx$ $\int \frac{4}{\sqrt{-x^2+4x+1}}dx$ $\int_{-8}^{4} \sqrt{\frac{36}{-x^2-4x+32}}dx$

$\int_{-1}^{3} \sqrt{\frac{1}{-x^2+2x+3}}dx$

3 Kann man jedes Integral $\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+bx+c}}dx$ mit der Stammfunktion arcsin berechnen? 8

Ergebnis: $\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+bx+c}}dx = \arcsin\left(\frac{x-\frac{b}{2}}{\sqrt{k}}\right) + C$ mit $k = c + \frac{1}{4}b^2$

4 Ausführliche Flächenberechnungen zu Wurzelfunktionsgraphen 10

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x+1}}$ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2-x+2}}$ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2+5x-3}}$

$f(x) = \frac{2}{\sqrt{-2x^2+12x-9}}$

5 Anwendung: Berechnung des Kreisumfangs mittels Integration 13

1 Grundwissen

Die Funktion f(x) = arcsin(x) ist die Umkehrfunktion von $f(x) = \sin(x)$.

Berechnung der Ableitungsfunktion: $y = \arcsin(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \sin(y)$

Implizite Ableitung: $1 = \cos(y) \cdot y' \quad$ also $\quad y' = \dfrac{1}{\cos(y)}$

Es gilt: $\sin^2 y + \cos^2 y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2 y = 1 - \sin^2 y$

$$\cos(y) = \pm\sqrt{1 - \sin^2(y)}$$

Wegen $x = \sin(y)$: $\quad \cos(y) = \pm\sqrt{1 - x^2}$

Folgerung: $\quad y' = \dfrac{1}{\cos(y)} = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1 - x^2}}$

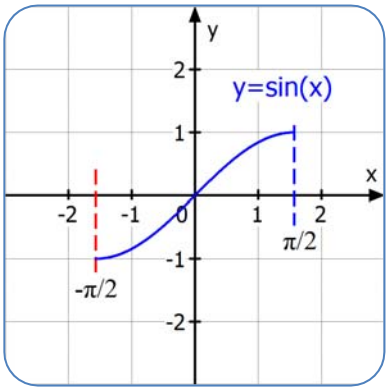
Das Vorzeichen richtet sich nach Definitionsintervall der Sinusfunktion:

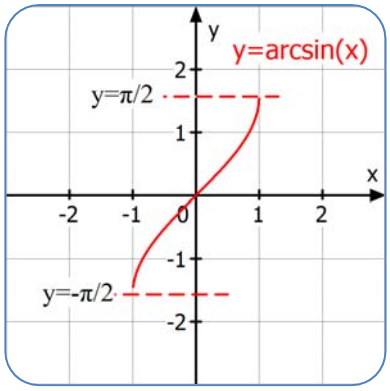
Kehrt man y = sin(x) in $\mathbf{D} = \left[-\frac{1}{2}\pi ; \frac{1}{2}\pi\right]$ um (siehe linke Abbildung), dann erhält man für die Umkehrfunktion $y = \arcsin(x)$ positive Steigungen in $]-1;1[$.

Dann gilt: $\boxed{f(x) = \arcsin(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$

Folgerung: $F(x) = \arcsin(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = \arcsin(x) + C}$$





Wertetabelle.

Von links nach rechts gilt: $x \rightarrow \sin(x)$

Von rechts nach links gilt: $\arcsin(x) \leftarrow x$

x	$\sin(x)$
0	0
$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{1}{2}\pi$	1
$\arcsin(x)$	x

2 Integral-Beispiele für die Stammfunktion arcsin

1) $\int_0^{0,5} \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}dx = 2\cdot\left[\arcsin(x)\right]_0^{0,5} = 2\cdot\left[\arcsin(0,5)-\arcsin(0)\right] = 2\cdot\left[\frac{1}{6}\pi - 0\right] = \frac{1}{3}\pi$

2) $\int\sqrt{\frac{1}{4-x^2}}dx =$ Im Nenner 4 ausklammern, damit man die Form $\sqrt{1-u^2}$ erhält:

$$... = \int\frac{1}{\sqrt{4(1-\frac{1}{4}x^2)}}dx = \int\frac{1}{2\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}}dx = \int\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}}\cdot\frac{1}{2}dx$$

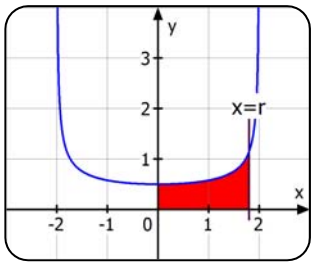
Vereinfachung durch die Substitution: $u = \frac{1}{2}x \Rightarrow du = \frac{1}{2}\cdot dx$

$$... = \int\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du = \arcsin(u) + C$$

Anwendung:

Hat die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion

$f(x) = \sqrt{\frac{1}{4-x^2}}$,den Koordinatenachsen und der Geraden x = 2 einen endlichen Inhalt?



Man setzt dazu als rechten Rand x = r (0<r<2) an:

$$A(r) = \int_0^r\sqrt{\frac{1}{4-x^2}}dx = ... = \int_0^{\frac{1}{2}r}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du = \left[\arcsin(u)\right]_0^{\frac{1}{2}r} = \arcsin\left(\frac{1}{2}r\right) - \underbrace{\arcsin(0)}_{0}$$

Die gesuchte Fläche hat dann den Inhalt $A = \lim_{r\to 2} A(r) = \lim_{r\to 2}\arcsin\left(\frac{1}{2}r\right) = \arcsin(1) = \frac{1}{2}\pi$ (FE)

Man darf diesen Grenzwert durch Einsetzen berechnen, weil die Funktion f stetig ist.

Ergebnis: Die bis ins Unendliche reichende Fläche hat den endlichen Inhalt $\frac{1}{2}\pi$.

3) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x^2}}$ Substitution: $u = \sqrt{2}\cdot x \Rightarrow du = \sqrt{2}\cdot dx \Rightarrow dx = \frac{1}{\sqrt{2}}du$ und $u^2 = 2x^2$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin(u) + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\arcsin\left(\sqrt{2}\cdot x\right) + C$$

4) $\int\frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}} = \int\frac{dx}{\sqrt{3\left(1-\frac{2}{3}x^2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{2}{3}x^2}}$ Substitution: $u = \sqrt{\frac{2}{3}}x \Rightarrow du = \sqrt{\frac{2}{3}}dx \Rightarrow dx = \sqrt{\frac{3}{2}}du$

$$... = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\int\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\arcsin(u) + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right) + C$$

5) **Zuerst diese Überlegung**:

Das Integral $\int \frac{4}{\sqrt{1-(x+1)^2}}dx$ kann man durch die Substitution $u = x+1$ in ein arcsin-Integral umformen. Wenn jedoch die Klammer in ausmultiplizierter Form vorliegt, erkennt man dies kaum mehr: $\int \frac{4}{\sqrt{1-(x^2+2x+1)}}dx$, also $\int \frac{4}{\sqrt{-x^2-2x}}dx$.

Das Merkmal: Der Koeffizient von x^2 ist negativ. Daher kann man auf die Form $1 - u^2$ kommen.

Hier der Lösungsweg:

$$\int \frac{4}{\sqrt{-x^2-2x}}dx = \int \frac{4}{\sqrt{-(x^2-2x\mathbf{+1-1})}}dx = \int \frac{4}{\sqrt{-(x^2+2x+1)+1}}dx = \int \frac{4}{\sqrt{1-(x+1)^2}}dx =$$

Vereinfachung mit der Substitution $u = x+1 \Rightarrow du = dx$

Ergebnis: $\int \frac{4}{\sqrt{-x^2-2x}}dx = 4\cdot\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du = 4\cdot\arcsin(u)+C = 4\cdot\arcsin(x+1)+C$

6) $\int \frac{1}{\sqrt{3x-x^2}}dx$ Quadratische Ergänzung im Nenner:

$$-x^2+3x = -(x^2-3x) = -\left(x^2-3x+\boxed{\tfrac{9}{4}}\right)+\boxed{\tfrac{9}{4}} = \tfrac{9}{4}-\left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2$$

Erklärung: Man muss erkennen, dass das Ziel von (x^2-3x) das Quadrat $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$ ist, denn 3x ist darin das doppelte Produkt. Also entsteht das zu ergänzende Quadrat durch Halbieren von 3 und Quadrieren: $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$. Dieses wird ergänzt. Weil vor der Klammer noch ein Minuszeichen steht, wurde dadurch jedoch $-\frac{9}{4}$ ergänzt. Zum Ausgleich muss man noch $+\frac{9}{4}$ anfügen.

$$\int \frac{1}{\sqrt{3x-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}}dx$$

Damit im Radikanden die „Pflicht-1“ entsteht, muss man in ihm $\frac{9}{4}$ ausklammern:

$$\ldots = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{4}\cdot\left[1-\frac{4}{9}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\right]}}dx = \frac{1}{\frac{3}{2}}\cdot\int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{9}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}}dx$$

Substitution: $u^2 = \frac{4}{9}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$ durch $u = \frac{2}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right) \Rightarrow du = \frac{2}{3}dx \Rightarrow dx = \frac{3}{2}\cdot du$

$$\ldots = \frac{1}{\frac{3}{2}}\cdot\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{3}{2}du = \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du = \arcsin(u)+C = \arcsin(\tfrac{2}{3}x-1)+C$$

7) $$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-2x+1}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2-2x}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(x^2+2x\right)}}dx \overset{\text{Ziel}}{=} k\cdot\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du$$

Um dieses Ziel zu erreichen, muss man im Radikanden eine <u>quadratische Ergänzung</u> durchführen: Damit aus $x^2 - 2x$ ein Quadrat wird, nämlich $(x-1)^2$, muss man die Quadratzahl 1 ergänzen:

$$1-\left(x^2+2x\right) = 1-\left(x^2+2x\mathbf{+1-1}\right) = 1-(x+1)^2+1 = 2-(x+1)^2$$

Damit entsteht folgendes:

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-2x+1}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{2-(x+1)^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{2\left[1-\frac{1}{2}(x+1)^2\right]}}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}(x+1)^2}}dx$$

Man musste 2 ausklammern um die „Pflicht-1“ zu erreichen.

Jetzt substituiert man so, dass $\frac{1}{2}(x+1)^2 = u^2$ wird, also:

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+1) \quad\Rightarrow\quad du = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot dx \quad\Rightarrow\quad dx = \sqrt{2}\cdot du$$

$$\ldots = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\sqrt{2}\cdot du = \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du = \arcsin(u)+C = \arcsin\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+C$$